Subject: Date: / /

* مجموعة الامتداد :

لتكن $v_1, v_2, \ldots, v_p \in R^n$

عندئذ تسمى المجموعة التي تضم كافة التراكيب الخطية للأشعة $v_1, v_2, \ldots, v_p$ بمجموعة الامتداد وعادةً مانرمز لها بـ $Span\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ وبكلام آخر أي أنه مجموعة الامتداد هي مجموعة كل الأشعة التي يمكن كتابتها على الشكل

$x_1v_1 + x_2v_2 \ldots x_pv_p$

حيث أن x_1, x_2, x_p قيم ثابتة .

مثال: لتكن $v_1 = \binom{2}{1}$ ، $v_2 = \binom{4}{2}$

a) أوجد شعاع مجموعة الامتداد $Span\{v_1, v_2\}$

b) صف هذه المجموعة $\{v_1, v_2\}$ هندسياً

الحل: (a) على سبيل المثال

$2\binom{2}{1} + 3\binom{4}{2} = \binom{4}{2} + \binom{12}{6} = \binom{16}{8}$

(b)

x_2 v_2 v_1 x_1

تعريف: نقول أن أعمدة المصفوفة A

$A = [a_1, a_2, \ldots a_n]$

تولد الفضاء R^n إذا كان كل شعاع $b \in R^n$ هو تركيب خطي لأعمدة المصفوفة

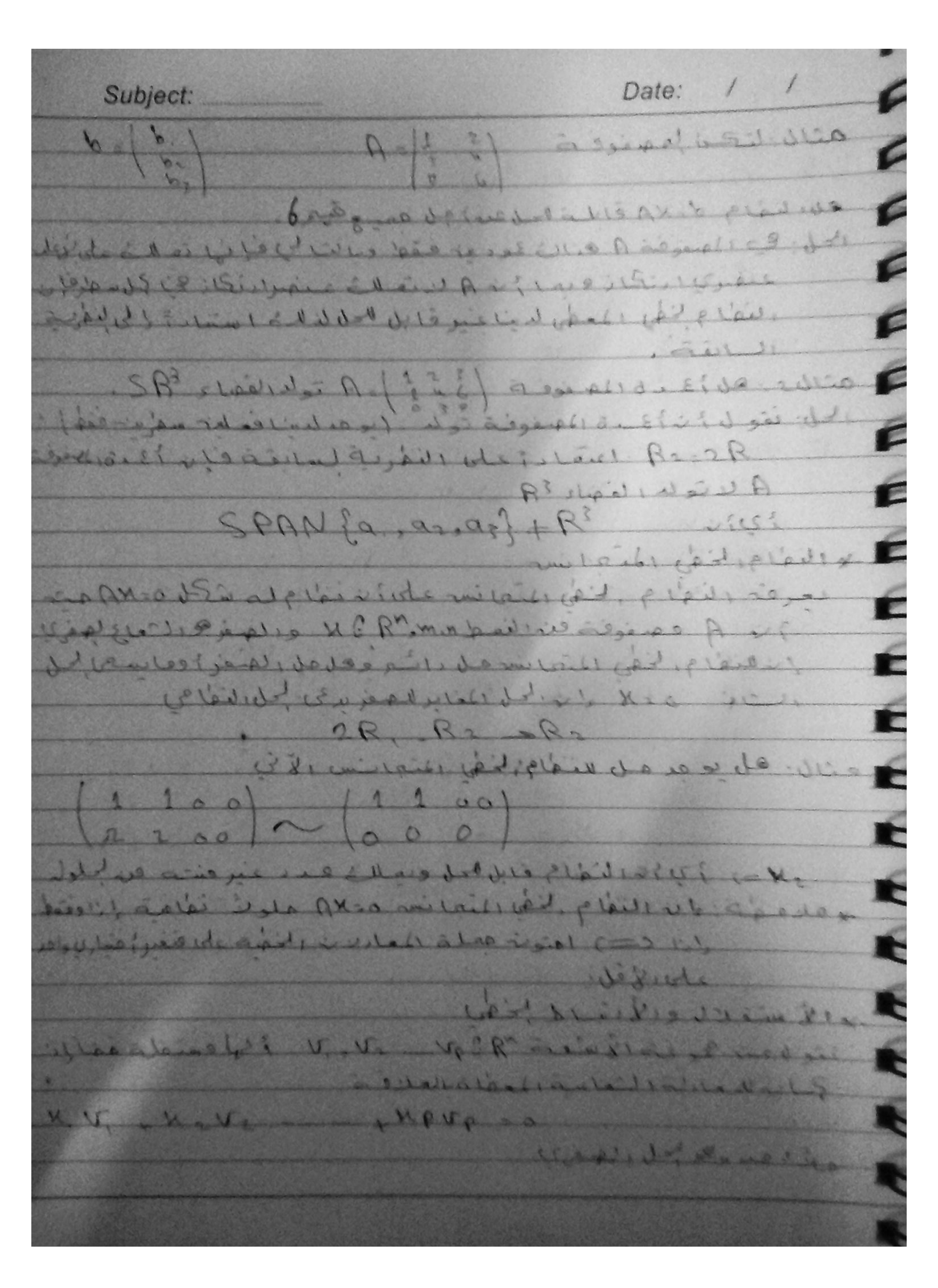
$Span[a_1, a_2 \ldots a_n] = R^n$

لتكن A مصفوفة من النمط $m \times n$ عندئذ فإن العبارات التالية متكافئة منطقياً . (1) من أجل أي $b \in R^n$ يوجد حل للمعادلة $Ax = b$

(2) من أجل $b \in R^n$ هو ارتباط خطي لأعمدة المصفوفة A

(3) $Span\{a_1, a_2 \ldots a_n\} R^n$

(4) في المصفوفة A عنصر محوري (ارتكاز) في كل سطر .



Subject: Date: / /

مثال: لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&2\\ ?&?\\ 3&6\end{pmatrix}$ ، $b=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$

هل النظام $Ax=b$ قابل للحل لجميع قيم b.

الحل: في المصفوفة A هنالك عمودين فقط وبالتالي فإنها [illegible] على الأقل [illegible]
[illegible] A [illegible]
النظام الخطي [illegible] غير قابل للحل [illegible] إلى النظرية
السابقة.

مثال: هل أعمدة المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\ ?&?&?\\ ?&?&?\end{pmatrix}$ تولد الفضاء R^3.

الحل: نقول أن أعمدة المصفوفة تولد [illegible] صف [illegible] $R_2 = 2R$ [illegible] على النظرية السابقة [illegible]
A لا تولد الفضاء R^3
إذن $SPAN\{a_1, a_2, a_3\} \neq R^3$

* النظام الخطي المتجانس
يعرف النظام الخطي المتجانس على أنه نظام له شكل $Ax=0$ حيث A مصفوفة من النمط $m \times n$ و $x \in R^n$ والصفر هو المتجه الصفري
النظام الخطي المتجانس له دائما حل هو الصفر أو ما يسمى الحل
[illegible] $x=0$ [illegible] الحل التافه أو الصفري [illegible]

$R_2 \to R_2 - 2R_1$.

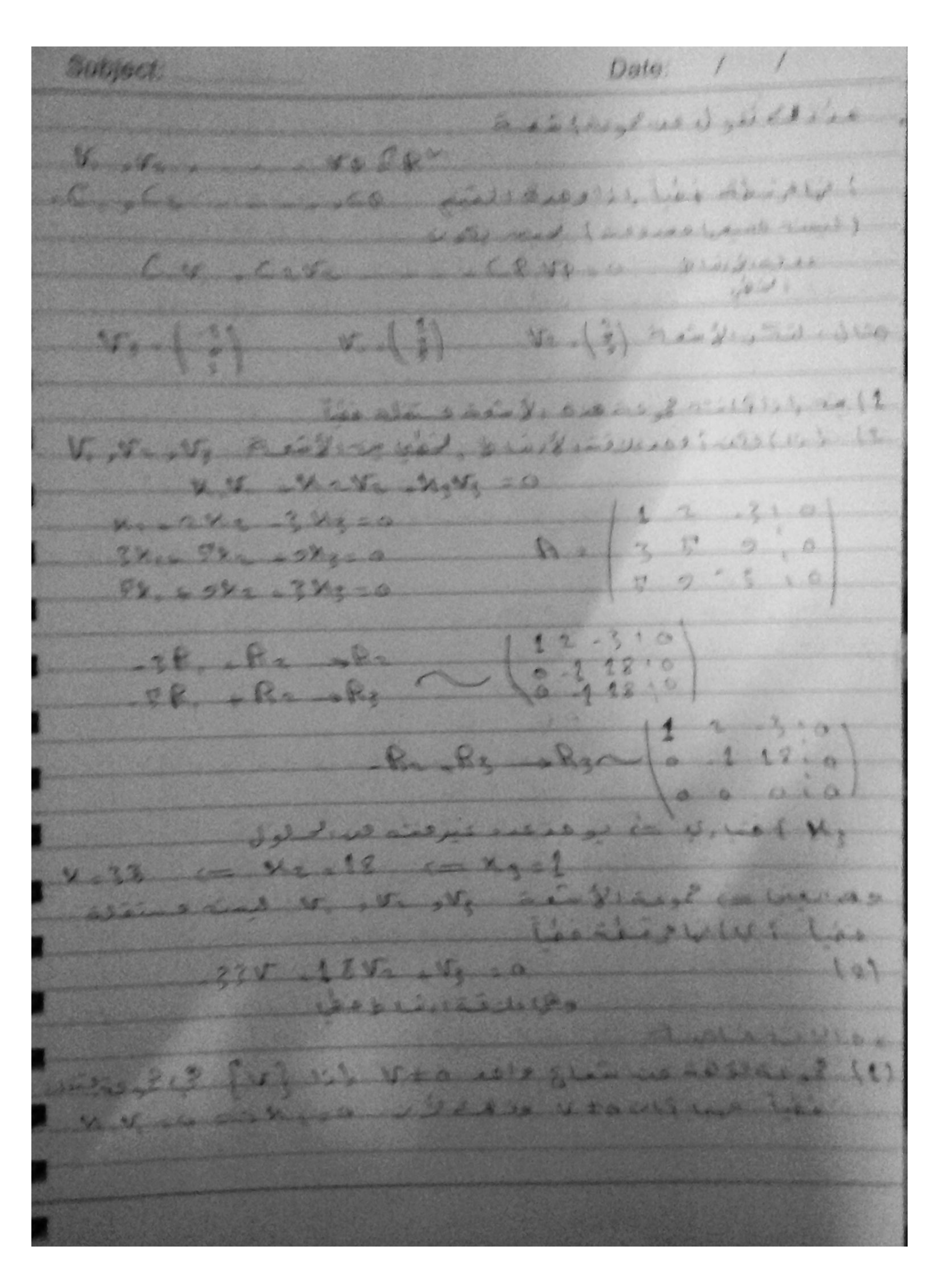
مثال: هل يوجد حل للنظام الخطي المتجانس الآتي

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\ 2&2&0&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&0&0\\ 0&0&0&0\end{pmatrix}$$

x_2 [illegible] أي أن النظام قابل للحل ويملك عدد غير منته من الحلول
[illegible] النظام الخطي المتجانس $Ax=0$ يملك حلول غير تافهة إذا وفقط
إذا [illegible] احتوت معادلة [illegible] على متغير حر واحد
على الأقل.

* الاستقلال والارتباط الخطي
نقول عن مجموعة المتجهات $v_1, v_2, \dots, v_p \in R^n$ أنها مستقلة خطيا إذا
كان [illegible] .
$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_p v_p = 0$
[illegible] الحل التافه [illegible]

Scanned by CamScanner



Subject: Date: / /

$v_1, v_2, \ldots, v_k \in R^n$

$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_k v_k = 0$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$

v_1, v_2, v_3

$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0$

$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$

$3x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 0$

$5x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 0$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 9 & 0 \\ 5 & 9 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$-3R_1 + R_2 \to R_2$

$-5R_1 + R_3 \to R_3$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 18 & 0 \\ 0 & -1 & 18 & 0 \end{array}\right)$$

$-R_2 + R_3 \to R_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

x_3

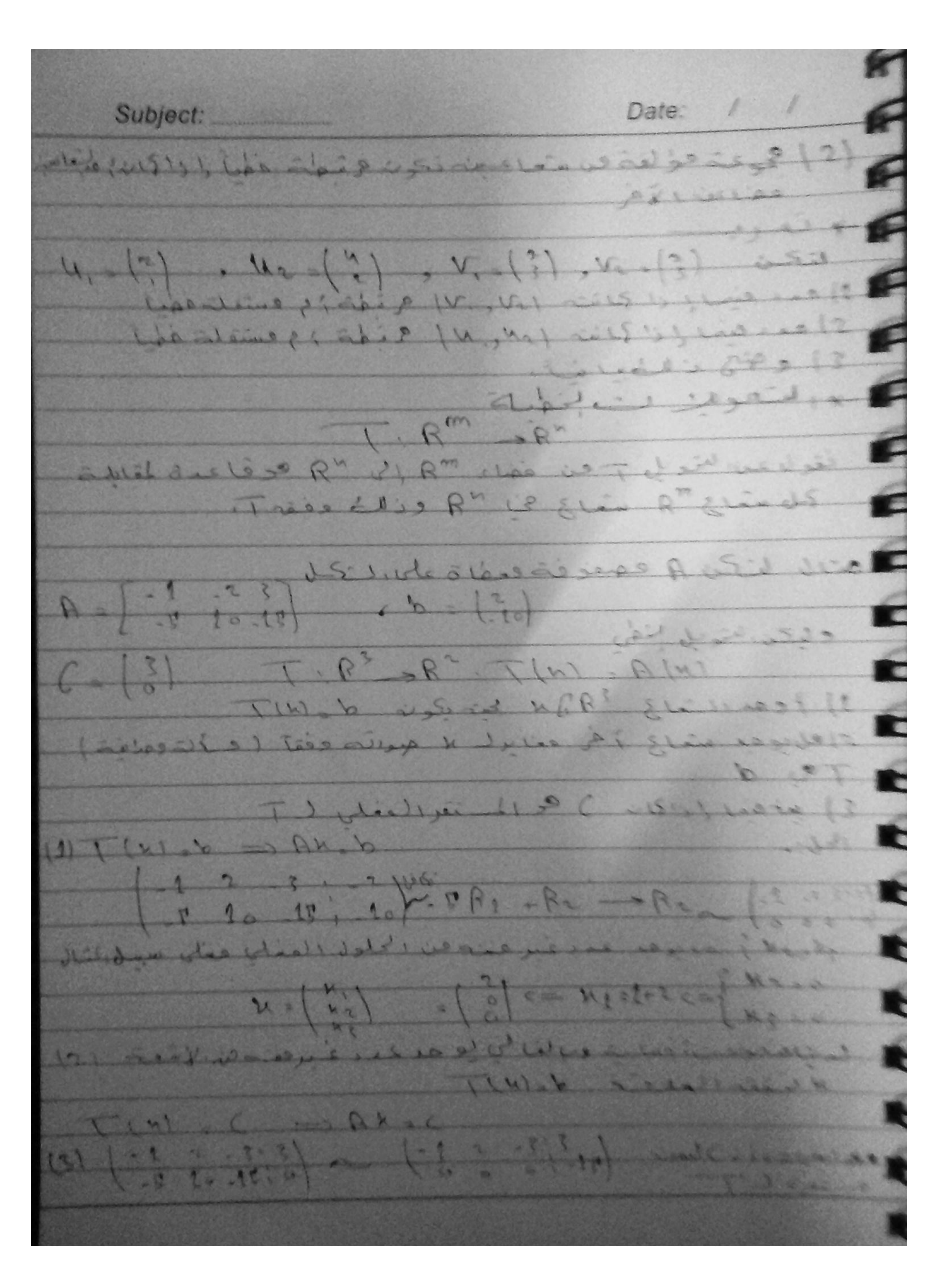
$x_1 = -33 \Leftarrow x_2 = 18 \Leftarrow x_3 = 1$

v_1, v_2, v_3

$-33v_1 - 18v_2 + v_3 = 0$

$v \neq 0$ $\{v\}$

$v \neq 0$



Subject: Date: / /

$u_1 = \binom{2}{1}$, $u_2 = \binom{4}{2}$, v_1 , v_2

إذا كانت $\{v_1, v_2\}$ مرتبطة أم مستقلة خطيا

إذا كانت $\{u_1, u_2\}$ مرتبطة أم مستقلة خطيا

التحويلات الخطية

$T : R^m \to R^n$

نعرف التحويل T من فضاء R^m إلى R^n هو قاعدة لمقابلة كل متجه R^m بمتجه في R^n وذلك وفقا T.

مثال لتكن A مصفوفة معطاة على الشكل

$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -5 & 10 & -15 \end{bmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $T : R^3 \to R^2$, $T(x) = A(x)$

(1) أوجد المتجه $x \in R^3$ بحيث يكون $T(x) = b$

(2) هل يوجد متجه آخر مقابل x صورته وفقا T هو b

(3) هل يقع المتجه C في المدى لـ T

(1) $T(x) = b \Rightarrow Ax = b$

$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & -2 \\ -5 & 10 & -15 & -10 \end{array}\right) \sim -5R_1 + R_2 \to R_2$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$T(x) = b$

$T(x) = C \Rightarrow Ax = C$

(3) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 3 \\ -5 & 10 & -15 & 0 \end{array}\right) \sim$